

数学の研究を始めよう (V)

オイラーをモデルに数論研究

第2章 a

スーパー完全数とウルトラ完全数

飯高 茂

平成 30 年 3 月 11 日

1 スーパー完全数の m だけ平行移動

1.1 完全数の m だけ平行移動

m だけ平行移動した狭義の完全数 α は定義により $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e によって $\alpha = 2^e q$ と書ける. すると,

$a = 2^e$ および $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $N = \sigma(a)$, $q = N + m = \sigma(a) + m$, $q + 1 = 2a + m$ を満たす.

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= \sigma(2^e)\sigma(q) \\ &= Nq + N \\ &= 2\alpha - q + N \\ &= 2\alpha - m.\end{aligned}$$

かくしてできた $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ を α を未知数とみることにして平行移動 m の完全数の方程式とみなす. この解 α を平行移動 m の (広義) 完全数 (perfect number with translation parameter m) という.

平行移動を考えることにより研究すべき完全数が飛躍的に増え豊富な結果が得られるようになった.

1.2 スーパー完全数の場合

q :素数 により $\sigma(q) = q + 1$.

この左辺は $\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$. 右辺は $q + 1 = 2a + m$ 一方, $q = \sigma(a) + m$ なので

$$\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

左項を抜いて次の式を得る.

$$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

a を未知数とみることによってこの式を平行移動 m のスーパー完全数の方程式と言うのであり, この解 a を平行移動 m のスーパー完全数という.

$m = 0$ のとき $\sigma^2(a) = \sigma(\sigma(a))$ とおくと平行移動 m のスーパー完全数の方程式は $\sigma^2(a) = 2a$ となるので, 完全数の方程式 $\sigma(a) = 2a$ と類似した形になりこの解をスーパー完全数と呼ぶ.

これは D.Suryanaryana さんにより 1969 年に導入された. また偶数スーパー完全数は 2 のべき, すなわち $a = 2^e$ となることは Suryanaryana さんにより示された. これは著しい結果である. 実際, パソコンで計算してみても奇数の解は見つからない.

表 1: $\sigma^2(a) = 2a$ のときの解 (スーパー完全数)

a	素因数分解	q	q の素因数分解
2	2	3	3
4	2^2	7	7
16	2^4	31	31
64	2^6	127	127
4096	2^{12}	8191	8191
65536	2^{16}	131071	131071

ここで $q = N(a)$ は本当の メルセンヌ素数

命題 1 $a = 2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数となる.

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる. $q > 2$ なら q は奇数で, m は偶数. したがって, m が奇数なら平行移動 m のスーパー完全数はあったとしても 2 べきにならない.

Proof.

式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に $a = 2^e$ を代入すると

$$\sigma(2^{e+1} - 1 + m) = 2^{e+1} + m.$$

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ とおくと, $\sigma(q) = q + 1$. よって, q は 素数.

End

ここで, $a = 2^e$ なので, $q = 2a - 1 + m$. 2 べきの解を正規解 (regular solutions) という.

命題 2 $a = 2^e$ で $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数なら a はスーパー完全数となる.

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる.

Proof.

q は素数なので $\sigma(q) = q + 1$.

$$q = 2^{e+1} - 1 + m = \sigma(a) + m, q + 1 = 2^{e+1} + m = 2a + m.$$

よって, $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$.

End

定義 1 平行移動 m のスーパー完全数 a に対して $q = 2a - 1 + m$ を擬メルセンヌ数という.

注意 1 実例にあたり、 $|m| < 10$ 位なら a が偶数の仮定だけでも $a = 2^e$ が導ける可能性がある。
(反例は $m = -28$ のときにある)

1.3 $m = 1$ のとき.

$m = 0$ のときは済んでいるのでいろいろな m についてスーパー完全数をパソコンで計算してみる.

表 2: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = 1$ のときの解

a	素因数分解	q 擬メルセンヌ数	q の素因数分解
1	1	2	2
15	$3 * 5$	30	$2 * 3 * 5$
190	$2 * 5 * 19$	380	$2^2 * 5 * 19$
36856	$2^3 * 17 * 271$	73712	$2^4 * 17 * 271$

m が奇数のとき解が 2 のべきにならないことが見て取れる.

1.4 $m = 2$ のとき.

$m = 2$ のとき, パソコンで計算してみると驚天動地の世界が現れた.

表 3: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = 2$ のときの解

a	素因数分解	q	素因数分解	フェルマ *
1	1	3	3	*
2	2	5	5	*
8	2^3	17	17	*
11	11	23	23	
41	41	83	83	
65	$5 * 13$	131	131	
107	107	215	$5 * 43$	
128	2^7	257	257	*
149	149	299	$13 * 23$	
881	881	1763	$41 * 43$	
959	$7 * 137$	1919	$19 * 101$	
2141	2141	4283	4283	
14363	$53 * 271$	28727	$23 * 1249$	
21119	$7^2 * 431$	42239	42239	
32768	2^{15}	65537	65537	*

表を眺めた結果

- a が偶数なら 2 のべきになり, $2a + 1$ はフェルマ素数.
- a が奇数の場合は, 11, 41, 107 などの素数が出る一方, 65, 959 などの合成数も並ぶ

1.5 $m = 3$ のとき.

表 4: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = 3$ のときの解

a	素因数分解	q 擬メルセンヌ数	q の素因数分解
5	5	12	$2^2 * 3$

解は 5 だけかもしれない.

1.6 $m = 4$ のとき.

表 5: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = 4$ のときの解

a	素因数分解	q 擬メルセンヌ数	q の素因数分解
1	1	5	5
2	2	7	7
4	2^2	11	11
8	2^3	19	19
32	2^5	67	67
47	47	97	97
64	2^6	131	131
341	$11 * 31$	685	$5 * 137$
587	587	1,177	$11 * 107$
2048	2^{11}	4,099	4099
16384	2^{14}	32,771	32771
32768	2^{15}	65,539	65539

素数の解 47,587 が出た.

1.7 $m = 6$ のとき.

表 6: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = 6$ のときの解

a	素因数分解	擬メルセンヌ数 q	q の素因数分解
1	1	7	7
4	2^2	13	13
16	2^4	37	37
49	7^2	103	103
1024	2^{10}	2,053	2053

$m = 6$ のとき解は $a = 49 = 7^2$ を例外としてほかは 2 べきである. 高橋洋翔は m が 6 の倍数の場合なら解は 2 べきが圧倒的に多いことを見出した.

1.8 m が 6 の倍数の場合

表 7: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = 12, 18$ のときの解

$m = 12$				$m = 18$			
a	素因数分解	q	素因数分解	a	素因数分解	q	q 素因数分解
1	1	13	13	1	1	19	19
4	2^2	19	19	4096	2^{12}	8209	8209
16	2^4	43	43				
64	2^6	139	139				
256	2^8	523	523				
16384	2^{14}	32779	32779				

表 8: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = 24, 30$ のときの解

$m = 24$				$m = 30$			
a	素因数分解	q	q 素因数分解	a	素因数分解	q	q 素因数分解 r
4	2^2	31	31	1	1	31	31
64	2^6	151	151	4	2^2	37	37
				16	2^4	61	61
				64	2^6	157	157
				256	2^8	541	541
				4096	2^{12}	8221	8221
				16384	2^{14}	32797	32797
				65536	2^{16}	131101	131101

1.9 $m = -1$ のとき.

m が負のときも解はいろいろある.

表 9: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = -1$ のときの解

a	素因数分解	q 擬メルセンヌ数	q の素因数分解
2	2	2	2

$q = 2$ は m が奇数のとき解が 2 のべきになるただ 1 つの例.

このとき解が素数 p と仮定する. $\sigma(p) = 2p - 1$ になる. $\sigma(p) = p + 1$ により $p = 2$.

1.10 $m = -2$ のとき.

表 10: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = -2$ のときの解

a	素因数分解	q 擬メルセンヌ数	q の素因数分解
4	2^2	5	5
7	7	11	11
8	2^3	13	13
16	2^4	29	29
29	29	55	$5 * 11$
32	2^5	61	61
253	$11 * 23$	503	503
256	2^8	509	509
512	2^9	1,021	1021
889	$7 * 127$	1,775	$5^2 * 71$
2048	2^{11}	4,093	4093
8192	2^{13}	16,381	16381

a が素数なら $a = 7, 29, \dots$

1.11 $m = -4$ のとき.

表 11: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = -4$ のときの解

a	素因数分解	q 擬メルセンヌ数	q の素因数分解
4	2^2	3	3
8	2^3	11	11
23	23	41	41
32	2^5	59	59
107	107	209	$11 * 19$
128	2^7	251	251
242	$2 * 11^2$	479	479
467	467	929	929
512	2^9	1,019	1019
653	653	1,301	1301
2048	2^{11}	4,091	4091
3077	$17 * 181$	6,149	$11 * 13 * 43$
6728	$2^3 * 29^2$	13,451	13451
9953	$37 * 269$	19,901	$7 * 2843$

a が素数なら $a = 23, 107, 653, \dots$

2 無数の解

$-200 \leq m \leq 150$ の範囲で調べた結果 $m = -58, -28, -18, -14$ に限って無数の素数に対応した無数の解があることが分かった. これらは通常解であり B 型解といってもよい.

ところで元祖完全数の平行移動 m で B 型解 αp がある場合, α は完全数, $m = -2\alpha$ に限られていた. 同様のことが究極の完全数でもありこの場合から超完全数が出てきた.

これと同様なことをスーパー完全数に期待しよう.

すなわち, $m = -994, -58, -28, -18, -14$ のとき B 型解が出てきたことに新しい研究の芽を感じる.

2.1 $m = -28$ のとき

表 12: $m = -28$

a	素因数分解	$p = a/7$	$q = 2p - 5$
26	$2 * 13$		
35	$5 * 7$	5	5
77	$7 * 11$	11	17
98	$2 * 7^2$	14	23
107	107		
119	$7 * 17$	17	29
128	2^7		
161	$7 * 23$	23	41
203	$7 * 29$	29	53
329	$7 * 47$	47	89
371	$7 * 53$	53	101
413	$7 * 59$	59	113
497	$7 * 71$	71	137
623	$7 * 89$	89	173
707	$7 * 101$	101	197
917	$7 * 131$	131	257
959	$7 * 137$	137	269
1043	$7 * 149$	149	293
1253	$7 * 179$	179	353
1379	$7 * 197$	197	389
1589	$7 * 227$	227	449
1631	$7 * 233$	233	461
1799	$7 * 257$	257	509

$a = 26 = 13 * 2$ は偶数でも 2 べきにならない例である.

この場合, 2 べきの解でないなら $a = 7p$ ($p \neq 7$: 素数) の形の解が多い. ここで $q = 2p - 5$ は素数とする.

ところで 素数解 107 は珍しく 一匹狼というべき存在.

私はこの結果を見て, 正気でいられないほど驚いた. 例外はあるものの解は $7p$, (p は素数) の形を持ちしかも無数にある.

ここでは正規解は 2^e の形なのだがそれらは影を潜めて素数の 7 倍の数 $7p$ が威風堂々と解として出てくるではないか.

私は非通常解, すなわち例外的で意外な解があるとき一般にエイリアンと名前をつけて絶滅危惧種の動物を見つけたように喜んでた. ここの解は多数で統率がとれていてまるで某国の兵士をみるようだ. そこで彼らを軍団と呼んでみよう.

軍団のに軍律は次のようなものがある.

命題 3 $m = -28$ に対し, p と $q = 2p - 5$ が素数のとき, $a = 7p$ は解.

Proof.

$m = -28$ を式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に代入すると $\sigma(\sigma(a) - 28) = 2a - 28$.

$a = 7p, (p \neq 7)$ とおくと $\sigma(a) - 28 = 8(p + 1) - 28 = 8p - 20 = 4(2p - 5)$. ここで, $q = 2p - 5$ は素数と仮定すると, $\sigma(a) - 28 = 4q$. したがって, $\sigma(4q) = 7q + 7$.

一方, $2a + m = 14p - 28 = 7(2p - 4) = 7(q + 1)$. よって, $\sigma(\sigma(a) - 28) = 2a - 28$.

END

この逆が弱いけれど次の形で成立する.

命題 4 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = -28$ のとき $a = 7L, (L \not\equiv 0 \pmod{7})$ と書けるなら, $L = p, q = 2p - 5$ はともに素数.

Proof.

$a = 7L$ のとき $A = \sigma(a) - 28$ とおくと定義から $\sigma(A) = 14L - 28 = 7(2L - 4)$.

$A = \sigma(a) - 28 = \sigma(7L) - 28 = 8\sigma(L) - 28 = 4(2\sigma(L) - 7)$.

$Q = 2\sigma(L) - 7$ とおくと, $A = 4Q$.

Q は奇数なので, 4 と互いに素. よって, $\sigma(A) = 7\sigma(Q)$.

$$\sigma(A)/7 = \sigma(Q) \geq Q + 1 = 2\sigma(L) - 6 \geq 2L + 2 - 6 = 2L - 4 = \sigma(A)/7.$$

等号が2回成り立ち,

$$\sigma(Q) = Q + 1, 2\sigma(L) - 6 = 2L - 4.$$

よって, $\sigma(Q) = Q + 1, \sigma(L) = L + 1$. それゆえ $L, Q = 2L - 5$ はともに素数.

End

2.2 $m = -18$

この場合, 2 べきの解以外は $a = 9$ と $a = 3p (p \neq 5, p: \text{素数})$ となるらしい. さらに $q = 2p - 7$ は素数.

ここでも軍団が見つかった.

表 13: $m = -18$

a	素因数分解	$p = a/3$	$q = 2p - 7$
15	$3 * 5$	5	3
16	2^4		
21	$3 * 7$	7	7
27	3^3	9	
39	$3 * 13$	13	19
57	$3 * 19$	19	31
64	2^6		
111	$3 * 37$	37	67
129	$3 * 43$	43	79
201	$3 * 67$	67	127
219	$3 * 73$	73	139
237	$3 * 79$	79	151
309	$3 * 103$	103	199
327	$3 * 109$	109	211
417	$3 * 139$	139	271
471	$3 * 157$	157	307
579	$3 * 193$	193	379
669	$3 * 223$	223	439
831	$3 * 277$	277	547
921	$3 * 307$	307	607
939	$3 * 313$	313	619
1024	2^{10}		

この場合, 素数 p の解が多い. ただし, $q = (p - 13)/6$ とおくと q は素数になるのが十分条件. 正規解である 2 のべき以外は $3p$ と書ける軍団のほかに, $3^3 = 27$ がある. これは擬素数解とみることができよう.

注意 2 -18 だけ平行移動したスーパー完全数は 2 のべき以外は $3p$ と書けることが証明できればうれしい.

次は軍団に加わる十分条件である.

命題 5 $m = -18$ に対し, $a = 3p$ ($p \neq 3, p$: 素数) かつ $q = 2p - 7$ が素数なら $a = 3p$ は解.

Proof

$m = -18$ を式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に代入すると $\sigma(\sigma(a) - 18) = 2a - 18$.

$a = 3p$, ($p \neq 5$) とおくと $\sigma(a) - 18 = 4(p + 1) - 28 = 4p - 14 = 2(2p - 7)$. ここで, $q = 2p - 7$ は素数と仮定する. $\sigma((\sigma(a) - 18)) = \sigma(2q) = 3q + 3$.

一方, $2a + m = 6p - 18 = 3(2p - 6) = 3(q + 7) - 18 = 3q + 3$. よって, $\sigma(\sigma(a) - 18) = 2a - 18$.

End

この逆が次の形で成立.

命題 6 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$, $m = -18$ のとき

$a = 3L$, ($L \neq 0 \pmod{7}$) と書ける解があるなら, $p = L$, $q = 2p - 7$ はともに素数.

Proof.

$a = 3L$ に対して, $A = \sigma(3L) - 18 = 4\sigma(L) - 18 = 2(2\sigma(L) - 9)$ となるので

$Q = 2\sigma(L) - 9$ とおくと Q は奇数で $A = 2Q$, $\sigma(A) = 2a - 18 = 6(L - 3)$.

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \sigma(2Q) \\ &= 3\sigma(Q) \geq 3Q + 3 \\ &= 6\sigma(L) - 27 + 3 \\ &= 6\sigma(L) - 24 \\ &\geq 6L + 6 - 24 = 6(L - 3)\end{aligned}$$

$3\sigma(Q) = 3Q + 3$, $\sigma(A) = 6(L - 3)$ はすでに示されているのですべて等号成立.

$3\sigma(Q) \geq 3Q + 3$, $6\sigma(L) - 24 = 6L + 6 - 24$ ゆえに

$$\sigma(Q) = Q + 1, \sigma(L) = L + 1.$$

よって, $L = p$, $q = 2p - 5$ はともに素数.

End

2.3 $m = -14$

表 14: $m = -14$

a	素因数分解	$b = a - 13$	$q = b/6$
16	2^4	3	
37	37	24	4
43	43	30	5
64	2^6	51	
67	67	54	9
79	79	66	11
127	127	114	19
128	2^7	115	
151	151	138	23
199	199	186	31
247	$13 * 19$	234	39
271	271	258	43
317	317	304	50.66666667 76
331	331	318	53
367	367	354	59
379	379	366	61
439	439	426	71
487	487	474	79
512	2^9	499	
547	547	534	89
619	619	606	101
631	631	618	103
691	691	678	113
907	907	894	149
919	919	906	151
991	991	978	163
1051	1051	1038	173

この場合, 素数 p の解が多い. ただし, $q = (p - 13)/6$ とおくとき q が素数となるような素数 p からなるようだが, $p = 37, 67, 307$ が例外. なぜ例外が出るかこの理由は後で明らかになる.

$m = -14$ を式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に代入すると $\sigma(\sigma(a) - 14) = 2a - 14$.

命題 7 $a = p, p \neq 2, 3$ とおくと $\sigma(a) - 14 = p - 13$. ここで, $6q = p - 13$. q は素数と仮定する. a は $\sigma(\sigma(a) - 14) = 2a - 14$ の解になる.

Proof

$$\sigma(\sigma(a) - 14) = 2a - 14$$

$\sigma(a) - 14 = 6q$. のとき, $\sigma(6q) = 12q + 12$ になる. よって,

$$\sigma(\sigma(a) - 14) = 12q + 12 = 2p - 26 + 12 = 2a - 14.$$

End

q は素数との仮定は本質的ではない.

これを満たさなくても $\sigma(\sigma(a) - 14) = 2a - 14$ の解になることはある.

- $a = 37, b = a - 13 = 24, b/6 = 4$:素数ではない
- $a = 67, b = a - 13 = 54, b/6 = 9$:素数ではない

実際 $a = 317$ については $b = a - 13 = 304$ は 6 の倍数ではない.

$304 = 2^4 * 19$ であって, $620 = \varphi(304)$ となり $2a + m = 2 * 317 - 14 = 620$. これは正しいから 317 は解である.

317 は通常解ではない. エイリアンとみなす事も可能である.

$b/6$ が整数にすらならない解 317 は独自の解であり, 一匹狼 (lonely wolf) と呼ばれるにふさわしい.

2.4 $m = -58$

軍団は, $-28, -18, -14$ のとき見つかった. さらに軍団を探すために $m = -100$ まで探索を広げると $m = -58$ で軍団をまた発見した. なぜ 58 なのか $m' = 28$ は第二完全数であり $-m-58 = 2m'+2$ なのであることが後にわかる.

表 15: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = -58$

a	素因数分解	$b = a - 57$	$q = b/28$
81	3^4	24	
86	$2 * 43$	29	
128	2^7	71	
197	197	140	5
281	281	224	8
421	421	364	13
701	701	644	23
1093	1093	1036	37
1373	1373	1316	47
1429	1429	1372	49
1625	$5^3 * 13$	1568	56
1709	1709	1652	59
1933	1933	1876	67
2255	$5 * 11 * 41$	2198	78.5
2269	2269	2212	79
2381	2381	2324	83
2549	2549	2492	89
2717	$11 * 13 * 19$	2660	95
3109	3109	3052	109
3221	3221	3164	113
3613	3613	3556	127
4229	4229	4172	149
4621	4621	4564	163
4733	4733	4676	167
5573	5573	5516	197
6301	6301	6244	223

$m = -58$ を式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に代入する.

$$\sigma(\sigma(a) - 58) = 2a - 58$$

$A = \sigma(a) - 58$ とおく. $B = \sigma(A)$ が $2a - 58$ になれば a は解.

命題 8 $a = p$ が素数で $A = p - 57 = 28q$, (q : 素数) となると仮定する. a は $\sigma(\sigma(a) - 58) = 2a - 58$ の解.

Proof

$B = \sigma(A) = \sigma(p - 57) = \sigma(28q) = 56(q + 1)$ になる.

一方, $2a - 58 = 2p - 58 = 2(57 + 28q) - 58 = 56q + 2 * 57 - 58 = 56(q + 1)$.

End

$a = p$ が素数であっても $\frac{p - 57}{28}$ が整数でない例はそこそこある. たとえば, $a = 281, 1429$,
この辺りは研究不足ということになる.

3 素数解の場合

$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ のときの解 a が素数 q なら $\alpha = \sigma(a) + m = q + 1 + m$ とおくと

$\sigma(\alpha) = 2a + m = 2q + m$ を満たす.

$\alpha - 1 - m = q$ により $2q + m = 2\alpha - 2 - m$.

よって α についての方程式 $\sigma(\alpha) = 2\alpha - 2 - m$ を得る. これは $\mu = 2 + m$ だけ平行移動した完全数である. (平行移動した完全数はよく研究されていて, この解は容易に多数発見できる)

すなわち

$$\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m.$$

この解 α に対して $q = \alpha - 1 - m$ とおく. これが素数 p なら, $a = p$ は $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ の素数解になる.

注意 3 一般に $\sigma(\alpha) = 2\alpha + \mu$ の解を 過剰度 (*abundance*) μ の過剰数という. *net* 上の整数列大辞典 (*OEIS*) でよく調べられていることは『完全数の新しい世界』の読者の一人 西山輝夫さんが教えてくださった.

例 1. $m = 2$ なら $\mu = 2 + m = 4$ であり 4 だけ平行移動した完全数は計算で求められる.

4 $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 2$ のときの解

表 16: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 2$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解
5	5	2	2
14	$2 * 7$	11	11
44	$2^2 * 11$	41	41
110	$2 * 5 * 11$	107	107
152	$2^3 * 19$	149	149
884	$2^2 * 13 * 17$	881	881
2144	$2^5 * 67$	2141	2141
8384	$2^6 * 131$	8381	$17^2 * 29$
18632	$2^3 * 17 * 137$	18629	$13 * 1433$
116624	$2^4 * 37 * 197$	116621	$139 * 839$

ここでは q が奇素数の例が非常に多い.

$q = 11, 41, 107, 149, 881, 2141$

2 だけ平行移動したスーパー完全数の結果と対応している.

解 a が素数の場合 11, 41, 107, 149, 881 が対応するのである.

5 $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 3$ のときの解

表 17: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = 2$ のときの解

a	素因数分解	q	素因数分解
1	1	3	3
2	2	5	5
8	2^3	17	17
11	11	23	23
41	41	83	83
65	$5 * 13$	131	131
107	107	215	$5 * 43$
128	2^7	257	257
149	149	299	$13 * 23$
881	881	1763	$41 * 43$
959	$7 * 137$	1919	$19 * 101$
2141	2141	4283	4283
14363	$53 * 271$	28727	$23 * 1249$
21119	$7^2 * 431$	42239	42239
32768	2^{15}	65537	65537

表 18: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 3$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解
9	3^2	5	5

表 19: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 4$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解
7	7	2	2
15	$3 * 5$	10	$2 * 5$
52	$2^2 * 13$	47	47
315	$3^2 * 5 * 7$	310	$2 * 5 * 31$
592	$2^4 * 37$	587	587
1155	$3 * 5 * 7 * 11$	1150	$2 * 5^2 * 23$

表 20: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 5$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解
50	$2 * 5^2$	44	$2^2 * 11$

表 21: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 6$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解
22	$2 * 11$	15	$3 * 5$
130	$2 * 5 * 13$	123	$3 * 41$
184	$2^3 * 23$	177	$3 * 59$
1012	$2^2 * 11 * 23$	1005	$3 * 5 * 67$
2272	$2^5 * 71$	2265	$3 * 5 * 151$
18904	$2^3 * 17 * 139$	18897	$3 * 6299$
33664	$2^7 * 263$	33657	$3 * 13 * 863$
70564	$2^2 * 13 * 23 * 59$	70557	$3 * 29 * 811$
85936	$2^4 * 41 * 131$	85929	$3 * 28643$
100804	$2^2 * 11 * 29 * 79$	100797	$3 * 33599$
391612	$2^2 * 13 * 17 * 443$	391605	$3 * 5 * 26107$

6 B 型解

$\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m$ が無数の解を持つ場合は $\mu = -2\beta$ と書けて, さらに β が完全数の場合である.

このとき $\alpha = \beta Q$, (Q は m と互いに素な素数) が解になりこれを B 型解という. したがって $\mu = 2 + m$ は偶数なので m も偶数.

6.1 完全数 6 の場合

簡単な完全数 $\beta = 6$ のとき, $\mu = -2\beta = -12, m = \mu - 2 = -14$ となり, 方程式は

$$\sigma(\alpha) = 2\alpha + 12.$$

$\alpha = \beta Q = 6Q$ が通常解であり, $q = \alpha - 1 - m = 6Q + 13$.

逆に $Q, q = 6Q + 13$ がともに素数であれば,

$A = \sigma(q) + m = 6Q + 14 - 14 = 6Q$ なので $\sigma(A) = 2A + 12$. ゆえに $a = q$ のとき

$$\sigma(\sigma(q) + m) = 12Q + 12 = 2(q - 13) + 12 = 2q - 14 = 2a + m$$

表 22: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = -14$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解	$A = q - 13$	$A/6$
24	$2^3 * 3$	37	37	24	4
30	$2 * 3 * 5$	43	43	30	5
42	$2 * 3 * 7$	55	$5 * 11$	42	7
54	$2 * 3^3$	67	67	54	9
66	$2 * 3 * 11$	79	79	66	11
78	$2 * 3 * 13$	91	$7 * 13$	78	13
102	$2 * 3 * 17$	115	$5 * 23$	102	17
114	$2 * 3 * 19$	127	127	114	19
138	$2 * 3 * 23$	151	151	138	23
174	$2 * 3 * 29$	187	$11 * 17$	174	29
186	$2 * 3 * 31$	199	199	186	31
222	$2 * 3 * 37$	235	$5 * 47$	222	37
246	$2 * 3 * 41$	259	$7 * 37$	246	41
258	$2 * 3 * 43$	271	271	258	43
282	$2 * 3 * 47$	295	$5 * 59$	282	47
304	$2^4 * 19$	317	317	304	50.66666667
318	$2 * 3 * 53$	331	331	318	53
354	$2 * 3 * 59$	367	367	354	59
366	$2 * 3 * 61$	379	379	366	61
402	$2 * 3 * 67$	415	$5 * 83$	402	67

擬素数解は $\alpha = 6 * 4 = 24, 6 * 9 = 54$ の 2 個ある.

- $\alpha = 24$ のとき $q = \alpha - 1 - m = 23 + 14 = 37, A = q - 13 = 24, A/6 = 4 = 2^2$.
- $\alpha = 54$ のとき $q = \alpha - 1 - m = 53 + 14 = 67, A = q - 13 = 54, A/6 = 9 = 3^2$.

この両者とも $Q = \frac{q-13}{6}$ が素数にならない.

エイリアン解は $\alpha = 304 = 2^4 * 19$. $q = \alpha - 1 - m = 304 + 13 = 317$:素数.

6.2 完全数 28 の場合

完全数 $\beta = 28$ のとき, $\mu = -2\beta = -56, m = \mu - 2 = -58$ となり, $\alpha = \beta Q = 28Q$ が解であり,
 $q = \alpha - 1 - m = 28Q + 57$. $Q, q = 28Q + 57$ がともに素数であれば,

$$A = \sigma(q) + m = q + 1 + m = 28Q + 57 + 1 - 58 = 28Q \quad \text{となる.}$$

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sigma(28)\sigma(Q) \\ &= 56(Q + 1) \\ &= 56Q + 56 \\ &= 2(q - 57) + 56 \\ &= 2q - 58 \\ &= 2a + m. \end{aligned}$$

よって $A = \sigma(q) + m$ なので $\sigma(A) = \sigma(\sigma(q) + m) = 2a + m$. $a = q$ より

$$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

表 23: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = -58$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解	$A = \alpha - 57$	$Q = A/28$
84	$2^2 * 3 * 7$	141	$3 * 47$	84	3
140	$2^2 * 5 * 7$	197	197	140	5
224	$2^5 * 7$	281	281	224	8
308	$2^2 * 7 * 11$	365	$5 * 73$	308	11
364	$2^2 * 7 * 13$	421	421	364	13
476	$2^2 * 7 * 17$	533	$13 * 41$	476	17
532	$2^2 * 7 * 19$	589	$19 * 31$	532	19
644	$2^2 * 7 * 23$	701	701	644	23
812	$2^2 * 7 * 29$	869	$11 * 79$	812	29
868	$2^2 * 7 * 31$	925	$5^2 * 37$	868	31
1036	$2^2 * 7 * 37$	1093	1093	1036	37
1148	$2^2 * 7 * 41$	1205	$5 * 241$	1148	41
1204	$2^2 * 7 * 43$	1261	$13 * 97$	1204	43
1316	$2^2 * 7 * 47$	1373	1373	1316	47
1372	$2^2 * 7^3$	1429	1429	1372	49

α が通常解 $28Q$ で q が素数の場合は

$$\alpha = 140, q = 197; \alpha = 224, q = 281; \alpha = 364, q = 421; \alpha = 644, q = 701; \alpha = 1036, q = 1093, \dots$$

ここでは $Q = A/28$ は素数.

しかし擬素数解の場合は

$$\alpha = 224 = 2^5 * 7, q = 281, A = 224, A/28 = 8$$

$$\alpha = 1372 = 2^2 * 7^3, q = 1429, A = 1372, A/28 = 49.$$

$A/28$ が素数にならず擬素数になっている.
完全数 496,8128 でも同じ計算になるが略す.

7 水谷一さんの研究

水谷さんは平行移動 m のスーパー完全数が素数の場合に研究を行った.

$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に素数解 p があるとき, この解を研究する.

$A = \sigma(a) + m$ とおく. $A = p + 1 + m$ となり $\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m) = 2p + m$ を満たす.

$p + 1 + m$ に対して, $\sigma(p + 1 + m)$ を計算するのは容易ではない. そこで次の仮定をおく.

$p + 1 + m = 2^k q$ (q : 素数), とかける場合に注目し, さらに $q = 2^{k+1} + m + 1$ と書けると仮定する.

$\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m) = \sigma(2^k q) = N(q + 1)$. ここで, $N = 2^{k+1} - 1$. $q = 2^{k+1} + m + 1$, により

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= N(q + 1) \\ &= (2^{k+1} - 1)q + N \\ &= 2^{k+1}q - q + N = 2(p + m + 1) - q + 2^{k+1} - 1 \\ &= 2p + m + 1 - q + 2^{k+1} + m + 1 - 1 \\ &= 2p + m.\end{aligned}$$

ゆえに, $\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m)$. よって,

$$\sigma(p + 1 + m) = 2p + m.$$

例 1 $m = 2$ のとき, $q = 2^{k+1} + m + 1 = 2^{k+1} + 3$.

- $k = 1$ なら, $q = 2^{k+1} + 3 = 7$: 素数. $p = 2^k q - m - 1 = 14 - 3 = 11$.
- $k = 2$ なら, $q = 2^{k+1} + 3 = 711$: 素数. $p = 2^k q - m - 1 = 44 - 3 = 41$.

8 解の構成

与えられた m に対して $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ を満たす a を求めることは容易ではない.
水谷一さんは次の条件下で解を構成した.

命題 9 (水谷一) α を完全数とし, $m = -2\alpha - 2$ とおく.

p, q は素数として, $p = \alpha q + 2\alpha + 1$ を満たすと仮定する. $a = p$ は式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ を満たす.

Proof.

$$\sigma(p) = p + 1 = \alpha q + 2\alpha + 2.$$

$\sigma(\sigma(a) + m) = \alpha q + 2\alpha + 2 + m = \alpha q$ により α が q でわれないとき $\sigma(a) + m = \sigma(\alpha q)$ によって

$$\sigma(\sigma(a) + m) = \sigma(\alpha q) = 2\alpha(q + 1) = 2\alpha q + 2\alpha.$$

$p = \alpha q + 2\alpha + 1$ を用いると,

$$\begin{aligned} 2\alpha q + 2\alpha &= 2p - 2(2\alpha + 1) + 2\alpha \\ &= 2p - 2\alpha - 2 \\ &= 2p + m \end{aligned}$$

これより

$$\sigma(\sigma(a) + m) = 2p + m.$$

End

注意 4 ゼミで水谷さんの上記の構成を教えられて私の考えをまとめて以上の研究ができた.

9 素数解の出るとき

9.1 $m = -14$

この場合, 素数 p の解が多い. ただし, $q = (p - 13)/6$ とおくと q が素数となるような素数 p になるようだが, $p = 37, 67, 307$ が例外. なぜ例外が出るかこの理由は後で明らかになる.

表 24: $m = -14$

a	素因数分解	$b = a - 13$	$q = b/6$
16	2^4	3	
37	37	24	4
43	43	30	5
64	2^6	51	
67	67	54	9
79	79	66	11
127	127	114	19
128	2^7	115	
151	151	138	23
199	199	186	31
247	$13 * 19$	234	39
271	271	258	43
317	317	304	50.66666667 76
331	331	318	53
367	367	354	59
379	379	366	61
439	439	426	71
487	487	474	79
512	2^9	499	
547	547	534	89
619	619	606	101
631	631	618	103
691	691	678	113
907	907	894	149
919	919	906	151
991	991	978	163
1051	1051	1038	173

$m = -14$ を式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に代入すると $\sigma(\sigma(a) - 14) = 2a - 14$.

$a = p, (p \neq 2, 3, p: \text{素数})$ とおくと $\sigma(a) - 14 = p - 13$.

命題 10 $6q = p - 13$. q は $q > 3$ で素数と仮定する. a は $\sigma(\sigma(a) - 14) = 2a - 14$ の解になる.

Proof

$\sigma(\sigma(a) - 14) = 2a - 14$ を確認すればよい.

$a = p, p = 13 + 6q, q$ は $q > 3$ で素数のとき $\sigma(a) - 14 = 6q$ なので $\sigma(6q) = 12q + 12$ になる.
よって,

$$\sigma(\sigma(a) - 14) = 12q + 12 = 2p - 26 + 12 = 2a - 14.$$

End

q は素数との仮定は本質的仮定ではない.

これを満たさなくても $\sigma(\sigma(a) - 14) = 2a - 14$ の解になることはある.

- $a = 37, b = a - 13 = 24, b/6 = 4$:素数ではない

- $a = 67, b = a - 13 = 54, b/6 = 9$:素数ではない

実際 $a = 317$ については $b = a - 13 = 304$ は 6 の倍数ではない.

$304 = 2^4 * 19$ であって, $620 = \varphi(304)$ となり $2a + m = 2 * 317 - 14 = 620$. これは正しいから 317 は解である.

317 は通常解ではない. エイリアンとみなす事も可能である.

$b/6$ が整数にすらならない解は独自の解であり, 一匹狼 (lonely wolf) と呼ばれるにふさわしい.

9.2 $m = -58$

軍団は, $m = -58, -28, -18, -14$ のとき見つかった. さらに $m = -100$ まで探索を広げると $m = -58$ で軍団がまた発見された.

表 25: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = -58$

a	素因数分解	$b = a - 57$	$q = b/28$
81	3^4	24	
86	$2 * 43$	29	
128	2^7	71	
197	197	140	5
281	281	224	8
421	421	364	13
701	701	644	23
1093	1093	1036	37
1373	1373	1316	47
1429	1429	1372	49
1625	$5^3 * 13$	1568	56
1709	1709	1652	59
1933	1933	1876	67
2255	$5 * 11 * 41$	2198	78.5
2269	2269	2212	79
2381	2381	2324	83
2549	2549	2492	89
2717	$11 * 13 * 19$	2660	95
3109	3109	3052	109
3221	3221	3164	113
3613	3613	3556	127
4229	4229	4172	149
4621	4621	4564	163
4733	4733	4676	167
5573	5573	5516	197
6301	6301	6244	223

$m = -58$ を式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に代入する.

$$\sigma(\sigma(a) - 58) = 2a - 58$$

$A = \sigma(a) - 58$ とおく. $B = \sigma(A)$ が $2a - 58$ になれば a は解.

命題 11 $a = p$ が素数で $A = p - 57 = 28q$, (q :素数) となると仮定する. a は $\sigma(\sigma(a) - 58) = 2a - 58$ の解.

Proof

$B = \sigma(A) = \sigma(p - 57) = \sigma(28q) = 56(q + 1)$ になる.

一方, $2a - 58 = 2p - 58 = 2(57 + 28q) - 58 = 56q + 2 * 57 - 58 = 56(q + 1)$.

End

$a = p$ が素数であっても $\frac{p - 57}{28}$ が整数でない例はそこそこある. たとえば, $a = 281, 1429$,
この辺りはあとで研究する.

10 スーパー完全数が素数の場合

$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ のときの解 a が素数 q なら $\alpha = \sigma(a) + m = q + 1 + m$ とおくと
 $\sigma(\alpha) = 2a + m = 2q + m$ を満たす.

$\alpha - 1 - m = q$ により $2q + m = 2\alpha - 2 - m$.

よって α についての方程式 $\sigma(\alpha) = 2\alpha - 2 - m$ を得る. これは $\mu = 2 + m$ だけ平行移動した完全数である. (平行移動した完全数はよく研究されていて, この解は容易に多数発見できる)

すなわち

$$\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m.$$

この解 α に対して $q = \alpha - 1 - m$ とおく. これが素数 p なら, $a = p$ は $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ の素数解になる.

命題 12 m だけ平行移動したスーパー完全数が素数 q の場合, $\alpha = q + 1 + m$ とおく. α は $\mu = 2 + m$ だけ平行移動した完全数になる.

逆に $\mu = 2 + m$ だけ平行移動した完全数 α があり, $q = \alpha - m - 1$ が素数なら m だけ平行移動したスーパー完全数になる.

注意 5 一般に $\sigma(\alpha) = 2\alpha + \mu$ の解を 過剰度 (abundance) μ の過剰数という. ネット上の整数列大辞典 (OEIS) でよく調べられていることは『完全数の新しい世界』の読者の一人 西山輝夫さんが教えてくださった.

例 1. $m = 2$ なら $\mu = 2 + m = 4$ であり 4 だけ平行移動した完全数は計算で求められる.

11 $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 2$ のときの解

表 26: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 2$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解
5	5	2	2
14	$2 * 7$	11	11
44	$2^2 * 11$	41	41
110	$2 * 5 * 11$	107	107
152	$2^3 * 19$	149	149
884	$2^2 * 13 * 17$	881	881
2144	$2^5 * 67$	2141	2141
8384	$2^6 * 131$	8381	$17^2 * 29$
18632	$2^3 * 17 * 137$	18629	$13 * 1433$
116624	$2^4 * 37 * 197$	116621	$139 * 839$

ここでは q が奇素数の例が非常に多い.

$q = 11, 41, 107, 149, 881, 2141$

これは 2 だけ平行移動したスーパー完全数の素数解 11, 41, 107, 149, 881 と対応している.

表 27: $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m, m = 2$ のスーパー完全数

a	素因数分解	q	素因数分解
1	1	3	3
2	2	5	5
8	2^3	17	17
11	11	23	23
41	41	83	83
65	$5 * 13$	131	131
107	107	215	$5 * 43$
128	2^7	257	257
149	149	299	$13 * 23$
881	881	1763	$41 * 43$
959	$7 * 137$	1919	$19 * 101$
2141	2141	4283	4283
14363	$53 * 271$	28727	$23 * 1249$
21119	$7^2 * 431$	42239	42239
32768	2^{15}	65537	65537

表 28: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 4$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解
7	7	2	2
15	$3 * 5$	10	$2 * 5$
52	$2^2 * 13$	47	47
315	$3^2 * 5 * 7$	310	$2 * 5 * 31$
592	$2^4 * 37$	587	587
1155	$3 * 5 * 7 * 11$	1150	$2 * 5^2 * 23$

表 29: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 5$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解
50	$2 * 5^2$	44	$2^2 * 11$

表 30: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = 6$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解
22	$2 * 11$	15	$3 * 5$
130	$2 * 5 * 13$	123	$3 * 41$
184	$2^3 * 23$	177	$3 * 59$
1012	$2^2 * 11 * 23$	1005	$3 * 5 * 67$
2272	$2^5 * 71$	2265	$3 * 5 * 151$
18904	$2^3 * 17 * 139$	18897	$3 * 6299$
33664	$2^7 * 263$	33657	$3 * 13 * 863$
70564	$2^2 * 13 * 23 * 59$	70557	$3 * 29 * 811$
85936	$2^4 * 41 * 131$	85929	$3 * 28643$
100804	$2^2 * 11 * 29 * 79$	100797	$3 * 33599$
391612	$2^2 * 13 * 17 * 443$	391605	$3 * 5 * 26107$

12 B 型解

スーパー完全数では解が2のべきのとき、正規解といいこれが王道を歩む解である。これと正対な解が素数の解であり、これは $\mu = 2 + m$ だけ平行移動した完全数と対応する。

ここで完全数の通常解、すなわち B 型解の場合を考える。

$\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m$ が無数の解を持つ場合は完全数 β により $\mu = -2\beta$ と書ける場合である。

このとき $\alpha = \beta Q$, (Q は m と互いに素な素数) が解になりこれを B 型解という。特に, $\mu = 2 + m$ は偶数なので m も偶数。

12.1 完全数 6 の場合

簡単な完全数 $\beta = 6$ のとき, $\mu = -2\beta = -12, m = \mu - 2 = -14$ となり, 方程式は

$$\sigma(\alpha) = 2\alpha + 12.$$

$\alpha = \beta Q = 6Q$, ($Q \neq 2, 3$ の素数) が通常解であり, $q = \alpha - 1 - m = 6Q + 13$.

逆に $Q, q = 6Q + 13$ がともに素数であれば,

$A = \sigma(q) + m = 6Q + 14 - 14 = 6Q$ なので $\sigma(A) = 2A + 12$. ゆえに $a = q$ のとき

$$\sigma(\sigma(q) + m) = 12Q + 12 = 2(q - 13) + 12 = 2q - 14 = 2a + m$$

こうして $m = -14$ のスーパー完全数が大量に得られた。

$Q, q = 6Q + 13$ がともに素数となるとき, (Q, q) を超双子素数 (スーパー双子素数) という。パソコンで調べるとスーパー双子素数は無限にあると確信するが証明は当面出来ないものとして諦める。

擬素数解は $\alpha = 6 * 4 = 24, 6 * 9 = 54$ の2個ある。

- $\alpha = 24$ のとき $q = \alpha - 1 - m = 23 + 14 = 37, A = q - 13 = 24, A/6 = 4 = 2^2$.
- $\alpha = 54$ のとき $q = \alpha - 1 - m = 53 + 14 = 67, A = q - 13 = 54, A/6 = 9 = 3^2$.

この両者とも $Q = \frac{q-13}{6}$ が素数にならない。

エイリアン解は $\alpha = 304 = 2^4 * 19, q = \alpha - 1 - m = 304 + 13 = 317$:素数。

表 31: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = -14$ のときの解

$\alpha = 6Q$	素因数分解	q	素因数分解	$A = q - 13$	$A/6$
24	$2^3 * 3$	37	37	24	4
30	$2 * 3 * 5$	43	43	30	5
42	$2 * 3 * 7$	55	$5 * 11$	42	7
54	$2 * 3^3$	67	67	54	9
66	$2 * 3 * 11$	79	79	66	11
78	$2 * 3 * 13$	91	$7 * 13$	78	13
102	$2 * 3 * 17$	115	$5 * 23$	102	17
114	$2 * 3 * 19$	127	127	114	19
138	$2 * 3 * 23$	151	151	138	23
174	$2 * 3 * 29$	187	$11 * 17$	174	29
186	$2 * 3 * 31$	199	199	186	31
222	$2 * 3 * 37$	235	$5 * 47$	222	37
246	$2 * 3 * 41$	259	$7 * 37$	246	41
258	$2 * 3 * 43$	271	271	258	43
282	$2 * 3 * 47$	295	$5 * 59$	282	47
304	$2^4 * 19$	317	317	304	50.66666667
318	$2 * 3 * 53$	331	331	318	53
354	$2 * 3 * 59$	367	367	354	59
366	$2 * 3 * 61$	379	379	366	61
402	$2 * 3 * 67$	415	$5 * 83$	402	67

12.2 完全数 28 の場合

完全数 $\beta = 28$ のとき, $\mu = -2\beta = -56, m = \mu - 2 = -58$ となり, $\mu = -56$ だけ平行移動した完全数の方程式 $\sigma(a) = 2a + 56$ ができる.

$\alpha = \beta Q = 28Q, (Q \neq 2, 7 : \text{素数})$ が解であり, $q = \alpha - 1 - m = 28Q + 57$.

したがって, $Q, q = 28Q + 57$ がともに素数であれば, $A = \sigma(q) + m = q + 1 + m = 28Q + 57 + 1 - 58 = 28Q$ となる.

$$\begin{aligned}
 \sigma(A) &= \sigma(28)\sigma(Q) \\
 &= 56(Q + 1) \\
 &= 56Q + 56 \\
 &= 2(q - 57) + 56 \\
 &= 2q - 58 \\
 &= 2a + m.
 \end{aligned}$$

よって $A = \sigma(q) + m$ なので $\sigma(A) = \sigma(\sigma(q) + m) = 2a + m$. $a = q$ により

$$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

表 32: $\sigma(\alpha) = 2\alpha - \mu, \mu = 2 + m, m = -58$ のときの解

α	素因数分解	q	素因数分解	$A = \alpha - 57$	$Q = A/28$
84	$2^2 * 3 * 7$	141	$3 * 47$	84	3
140	$2^2 * 5 * 7$	197	197	140	5
224	$2^5 * 7$	281	281	224	8
308	$2^2 * 7 * 11$	365	$5 * 73$	308	11
364	$2^2 * 7 * 13$	421	421	364	13
476	$2^2 * 7 * 17$	533	$13 * 41$	476	17
532	$2^2 * 7 * 19$	589	$19 * 31$	532	19
644	$2^2 * 7 * 23$	701	701	644	23
812	$2^2 * 7 * 29$	869	$11 * 79$	812	29
868	$2^2 * 7 * 31$	925	$5^2 * 37$	868	31
1036	$2^2 * 7 * 37$	1093	1093	1036	37
1148	$2^2 * 7 * 41$	1205	$5 * 241$	1148	41
1204	$2^2 * 7 * 43$	1261	$13 * 97$	1204	43
1316	$2^2 * 7 * 47$	1373	1373	1316	47
1372	$2^2 * 7^3$	1429	1429	1372	49

α が通常解 $28Q (Q \neq 2, 7: \text{素数})$ で $q = 28Q + 57$ が素数の場合は
 $\alpha = 140, q = 197; \alpha = 224, q = 284; \alpha = 364, q = 421; \alpha = 644, q = 701; \alpha = 1036, q = 1093, \dots$
 ここでは $Q = A/28$ は素数.
 しかし擬素数解の場合は
 $\alpha = 224 = 2^5 * 7, q = 281, A = 224, A/28 = 8$
 $\alpha = 1372 = 2^2 * 7^3, q = 1429, A = 1372, A/28 = 49.$
 $A/28$ が素数にならず擬素数になっている.
 完全数 496,8128 でも同じ計算になるが略す.

13 水谷一さんの研究

水谷さんは平行移動 m のスーパー完全数が素数の場合に次のような研究を行った.

$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に素数解 p があるとき, この解を研究する.

$A = \sigma(a) + m$ とおく. $A = p + 1 + m$ となり $\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m) = 2p + m$ を満たす.

$p + 1 + m$ に対して, $\sigma(p + 1 + m)$ を計算するのは容易ではない. そこで次の仮定をおく.

$p + 1 + m = 2^k q (q : \text{素数})$, とかける場合に注目し, さらに $q = 2^{k+1} + m + 1$ と書けると仮定する.

$\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m) = \sigma(2^k q) = N(q + 1)$. ここで, $N = 2^{k+1} - 1$. $q = 2^{k+1} + m + 1$, により

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= N(q + 1) \\ &= (2^{k+1} - 1)q + N \\ &= 2^{k+1}q - q + N = 2(p + m + 1) - q + 2^{k+1} - 1 \\ &= 2p + m + 1 - q + 2^{k+1} + m + 1 - 1 \\ &= 2p + m.\end{aligned}$$

ゆえに, $\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m)$. よって,

$$\sigma(p + 1 + m) = 2p + m.$$

例 2 $m = 2$ のとき, $q = 2^{k+1} + m + 1 = 2^{k+1} + 3$.

$\langle 1 \rangle$ $k = 1$ なら, $q = 2^{k+1} + 3 = 7$: 素数. $p = 2^k q - m - 1 = 14 - 3 = 11$.

$\langle 2 \rangle$ $k = 2$ なら, $q = 2^{k+1} + 3 = 11$: 素数. $p = 2^k q - m - 1 = 44 - 3 = 41$.

$\langle 3 \rangle$ $k = 3$ なら, $q = 2^{k+1} + 3 = 19$: 素数. $p = 2^k q - m - 1 = 152 - 3 = 149$.

$\langle 4 \rangle$ $k = 4$ なら, $q = 2^{k+1} + 3 = 35$: 合成数.

14 解の構成

与えられた m に対して $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ を満たす a を求めることは容易ではない.
水谷一は次の条件下で解を構成した.

命題 13 (水谷一) α を完全数とし, $m = -2\alpha - 2$ とおく.

p, q は素数として, $p = \alpha q + 2\alpha + 1$ を満たすと仮定する. $a = p$ は式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ を満たす.

Proof.

$$\sigma(p) = p + 1 = \alpha q + 2\alpha + 2.$$

$\sigma(\sigma(a) + m) = \alpha q + 2\alpha + 2 + m = \alpha q$ により α が q でわれないとき $\sigma(a) + m = \sigma(\alpha q)$ によって

$$\sigma(\sigma(a) + m) = \sigma(\alpha q) = 2\alpha(q + 1) = 2\alpha q + 2\alpha.$$

$p = \alpha q + 2\alpha + 1$ を用いると,

$$\begin{aligned} 2\alpha q + 2\alpha &= 2p - 2(2\alpha + 1) + 2\alpha \\ &= 2p - 2\alpha - 2 \\ &= 2p + m. \end{aligned}$$

これより

$$\sigma(\sigma(a) + m) = 2p + m.$$

End

表 33: スーパー完全数

α (完全数)	6	28	496	8128
m	-14	-58	-994	-16258
$2\alpha + 1$	13	57	993	16257
$p = \alpha * q + 2\alpha + 1$	$p = 6q + 13$	$p = 28q + 57$	$p = 496q + 993$	

注意 6 ゼミで水谷さんの上記の構成を教えられて私の考えをまとめて以上の研究ができた.

15 ウルトラ完全数

高橋洋翔は スーパー完全数 をヒントにして次のような新種の完全数を定義した.

$\sigma^3(a) = \sigma(\sigma(\sigma(a)))$ とおく.

$a = 2^e, (q = 2a - 1 : \text{素数})$ とする. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくのはいつもの通り. すると $\sigma(a) = N = 2a - 1 = q$ は素数なので, $\sigma(q) = q + 1 = 2a$.

$2a = 2^{e+1}$ なので $\sigma(2a) = \sigma(2^{e+1}) = 2^{e+2} - 1 = 4a - 1$ に注目する. $\sigma(q) = q + 1 = 2a$ の両辺の σ を計算する.

$\sigma(a) = q$ と $\sigma(\sigma(q)) = \sigma(2a) = 4a - 1$ とによって

$$\sigma(\sigma(\sigma(a))) = 4a - 1.$$

書き直して

$$\sigma^3(a) = 4a - 1.$$

定義 2 $\sigma^3(a) = 4a - 1$ を a を未知数とする方程式と見てウルトラ完全数の方程式といい, この解 a をウルトラ完全数 (*ultra perfect number*) という.

$a = 2^e, q = 2a - 1 : \text{素数}$ のとき, a はウルトラ完全数になる. ちなみに, $\alpha = 2^e q = aq$ は古典的完全数.

表 34: $P = 2, m = 0$ ウルトラ完全数

a	素因数分解	$2a - 1$
2	2	3
4	2^2	7
16	2^4	31
64	2^6	127
4096	2^{12}	8191
65536	2^{16}	131071
262144	2^{18}	524287

ここで得られた解は古典的完全数 ($\sigma(\alpha) = 2\alpha$ の解) の 2 べき部分と完全に合致する. この事実は期待した結果である. それにしてもうまくいっている.

オイラーの証明と同じく, 偶数のウルトラ完全数は完全数の 2 べき部分と一致することが示せるであろうか.

15.1 m 回合成した $\sigma^m(a)$

$\sigma^3(a)$ の発展形として m 回合成した $\sigma^m(a)$ を考えることができる.

(m, k) スーパー完全数とは $\sigma^m(a) = ka$ を満たす数である.

Wolfram Mathworld より

The first few (2, 2)-perfect numbers are

2, 4, 16, 64, 4096, 65536, 262144, ...

(OEIS A019279; Cohen and te Riele 1996).

For $m \geq 3$, there are no even m -superperfect numbers (Guy 1994, p. 65).

On the basis of computer searches,

J. McCranie has shown that

there are no $(m, 2)$ -superperfect numbers less than 4.29×10^9 for any $m \geq 3$

(McCranie, pers. comm., Nov. 11, 2001).

(m, k) スーパー完全数として一般化したものの解がほとんど無いというのが実情.

しかし $(3, 10)$ スーパー完全数は少し解がある.

表 35: $(3, 10)$ スーパー完全数

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
156	$2^2 * 3 * 13$
32704	$2^6 * 7 * 73$

16 m だけ平行移動したウルトラ完全数

$a = 2^e$, ($q = 2a - 1 + m$: 素数) のとき, a を m だけ平行移動した狭義のウルトラ完全数という.

$a = 2^e$ に対して, $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $\sigma(a) = N = 2a - 1 = q - m$ なので $q = \sigma(a) + m$.

$\sigma(q) = q + 1$ によって $\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$, $q + 1 = 2a + m$.

$$\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

$\sigma(2a) = 4a - 1$, $2a = \sigma(\sigma(a) + m) - m$ なので

$$\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1.$$

a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という.

定義 3 $\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1$ となる式を, a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という.

ウルトラ完全数の方程式は複雑なので次のように分解する.

$$A = \sigma(a) + m, B = \sigma(A) - m, C = \sigma(B) \text{ とおくと } C = 4a - 1.$$

さて m だけ平行移動したウルトラ完全数の解で 2 べき $a = 2^e$ があるとする. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと $\sigma(a) = N = 2a - 1$ であり

$$A = \sigma(a) + m = N + m, B = \sigma(A) - m.$$

これでは話が続かないので, $A = N + m = 2a - 1 + m$ を素数と仮定する. $B = \sigma(A) - m = A + 1 - m = 2^{e+1}$ なので $C = \sigma(B) = 2^{e+2} - 1 = 4a - 1$. 以上により次の結果が示された.

定理 1 $a = 2^e$ に対して, $2a - 1 + m$ が素数なら, $a = 2^e$ は m だけ平行移動したウルトラ完全数.

このような解 $a = 2^e$ を正規形という.

16.1 数表

m だけ平行移動したウルトラ完全数をパソコンで計算する．結果を見ると，スーパー完全数の場合に比較して 2 のべきが非常に多い．

ウルトラ完全数の方程式はスーパー完全数の方程式に比してさらに強力であると言っていいのだろうか．

表 36: $m = -5, 0$ ウルトラ完全数

$m = -5 \quad q = 2a - 4$			$m = 0 \quad q = 2a - 1$		
a	素因数分解	q	a	素因数分解	q
4	2^2	2	2	2	3
			4	2^2	7
			16	2^4	31
			64	2^6	127
			4096	2^{12}	8191
			65536	2^{16}	131071

表 37: $m = -4, 1$ ウルトラ完全数

$m = -4 \quad q = 2a - 5$			$m = 1 \quad q = 2a$		
a	素因数分解	q	a	素因数分解	q
4	2^2	3	1	1	2
8	2^3	11			
32	2^5	59			
128	2^7	251			
512	2^9	1019			
2048	2^{11}	4091			
64178	$2 * 32089$	128351			

2 べきの解が圧倒的であるが $m = -4$ のとき $a = 64178 = 2 * 32089$ というエイリアンが出てくる．

表 38: $m = -3, 2$ ウルトラ完全数

$m = -3$	$q = 2a - 4$		$m = 2$	$q = 2a + 1$	
a	素因数分解	q	a	素因数分解	q
2	2	0	1	1	3
			2	2	5
			8	2^3	17
			128	2^7	257
			32768	2^{15}	65537

表 39: $P = 2, m = -2, 4$ ウルトラ完全数

$m = -2$	$q = 2a - 3$		$m = 4$	$q = 2a + 3$	
a	素因数分解	q	a	素因数分解	q
4	2^2	5	1	1	5
8	2^3	13	2	2	7
16	2^4	29	4	2^2	11
32	2^5	61	8	2^3	19
43	43	83	32	2^5	67
256	2^8	509	64	2^6	131
512	2^9	1021	2048	2^{11}	4099
2048	2^{11}	4093	16384	2^{14}	32771
8192	2^{13}	16381	32768	2^{15}	65539

$a = 43$ という素数解があった. 一匹狼として無視.

表 40: $m = -1, 6$ ウルト ラ完全数

$m = -1$	$q = 2a - 2$		$m = 6$	$q = 2a + 5$	
a	素因数分解	q	a	素因数分解	q
1	1	0	1	1	7
2	2	2	4	2^2	13
8	2^3	14	16	2^4	37
			1024	2^{10}	2053